波動とは？

波動の定義

A wave is a disturbance of a continuous medium that propagates with a fixed shape at constant velocity.

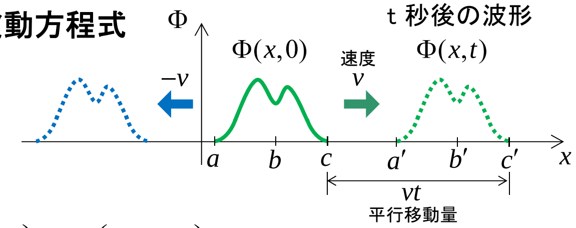
一定速度でその形を保ったまま伝わる連続媒質の擾乱

Φに関する1次元波動方程式

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$$

Φの一般解は

$$\Phi(x,t) = \underline{f(x - vt)} + \underline{g(x + vt)}$$



第1項目：x 軸＋方向に vt 平行移動した関数
（関数 f の具体的な形は，テイラー級数でもフーリエ級数でもよい）

第2項目：vt だけ x 軸の－方向に平行移動する関数

D. J. Griffiths ``Introduction to electrodynamics,'' p.364, Prentice Hall　　Φが波動方程式の解であることを確認せよ。

波動方程式の解の形

Φの具体例の一つ

$$\cos(\omega t - kz) = \cos\{-k(\underline{z - vt})\} = \mathrm{Re}\left[e^{j(\omega t - kz)}\right] = \mathrm{Re}\left[e^{j\{-k(\underline{z-vt})\}}\right]$$

平行移動関数
（t秒後にvtだけ右に移動する）

$$\boxed{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -\frac{\omega^2}{v^2}\Phi}$$

Φが時間調和関数（周波数ωの正弦波の重ね合わせ）なら，∂／∂t=jωより

周波数領域の波動方程式と呼ぶ（時間項 $e^{j\omega t}$ を省略した形）

デカルト座標（時間項含む）

$$\begin{cases} e^{jkz}e^{j\omega t} = \cos(\omega t + kz) + j\sin(\omega t + kz) \\ e^{-jkz}e^{j\omega t} = \cos(\omega t - kz) + j\sin(\omega t - kz) \end{cases}$$

デカルト座標

$\exp(jkr)$	指数関数
$\cos(kr)$	余弦関数
$\sin(kr)$	正弦関数

$$\begin{cases} e^{jkz} = \cos(kz) + j\sin(kz) & \text{後退波} \\ e^{-jkz} = \cos(kz) - j\sin(kz) & \text{前進波} \end{cases}$$

（平面波）

電界と磁界に関する連立方程式

微分形	構成方程式（補助方程式）	時空に関する1階のベクトル連立偏微分方程式
$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$		$\nabla \times \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ (1)
$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$	$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ (2)
$\nabla \bullet \vec{D} = 0$	$\vec{B} = \mu \vec{H}$	$\varepsilon \nabla \bullet \vec{E} = 0$
$\nabla \bullet \vec{B} = 0$	$\vec{J} = \sigma \vec{E}$	$\mu \nabla \bullet \vec{H} = 0$

構成方程式（補助方程式）を代入して，*D-B* を*E-H* のみで表現すると，*E-H* に関する連立ベクトル偏微分方程式(1)(2)になる。

波動方程式の導出

微分形の拡張アンペアの法則より	微分形のファラデーの法則より
$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \cdots (1)$	$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \cdots (2)$

(1)式の回転をとると，

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \vec{E}$$

ベクトル公式と(2)式より，

$$\nabla\left(\nabla \bullet \vec{H}\right) - \nabla^2 \vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$$

磁束密度に関するガウスの法則より，∇･H=0 なので

$$\nabla^2 \vec{H} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \quad \cdots (1)'$$

$$v = \sqrt{1/\mu_0 \varepsilon_0}$$

磁界波動方程式
ただし，vは位相速度
時空に関する2階のベクトル偏微分方程式

周波数ωの正弦波なら∂／∂t=jωより

$$\begin{aligned} &\nabla^2 \vec{H} + \underbrace{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0}_{} \vec{H} = 0 \\ &\nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0 \quad \cdots (1)'' \end{aligned}$$

波数の定義

周波数領域の磁界波動方程式

2階のベクトル偏微分方程式

(2)式の回転をとると，

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \vec{H}$$

ベクトル公式と(1)式より，

$$\nabla\left(\nabla \bullet \vec{E}\right) - \nabla^2 \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)$$

電荷を含まない場合のガウスの法則より，∇･E=0 なので　※ 含む場合は上級向け

$$\nabla^2 \vec{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \cdots (2)'$$

$$v = \sqrt{1/\mu_0 \varepsilon_0}$$

電界波動方程式
ただし，vは位相速度
時空に関する2階のベクトル偏微分方程式

周波数ωの正弦波なら∂／∂t=jωより

$$\begin{aligned} &\nabla^2 \vec{E} + \underbrace{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0}_{} \vec{E} = 0 \\ &\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \quad \cdots (2)'' \end{aligned}$$

波数の定義

周波数領域の電界波動方程式

2階のベクトル偏微分方程式

ベクトル公式

ベクトル公式

$$\nabla\times\nabla\times\vec{A}=\nabla(\nabla\bullet\vec{A})-\nabla^2\vec{A}$$

ベクトル三重積の公式※

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}\bullet\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\bullet\vec{B})$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}\bullet\vec{C})-(\vec{A}\bullet\vec{B})\vec{C}$$

(A●B)はスカラーなので順序入れ替え可能

Aを∇，Bを∇，CをAに置き換えて右辺を計算すると

$$\nabla\times\nabla\times\vec{A}=\nabla(\nabla\bullet\vec{A})-\nabla^2\vec{A}$$

坂本, ``ベクトルからはじめる電磁気学,'' pp.63-65, オーム社, 2018.

※ベクトル公式（ベクトル三重積）の証明

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}\bullet\vec{C})-(\vec{A}\bullet\vec{B})\vec{C}$$

$$\begin{aligned}
\left[\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})\right]_x &= A_y(\vec{B}\times\vec{C})_z-A_z(\vec{B}\times\vec{C})_y\\
&= A_y(B_xC_y-B_yC_x)-A_z(B_zC_x-B_xC_z)\\
&= A_yC_yB_x-A_yB_yC_x-A_zB_zC_x+A_zC_zB_x\\
&= (A_yC_y+A_zC_z)B_x-(A_yB_y+A_zB_z)C_x\\
&= (A_xC_x+A_yC_y+A_zC_z)B_x-(A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z)C_x\\
&= (\vec{A}\bullet\vec{C})B_x-(\vec{A}\bullet\vec{B})C_x
\end{aligned}$$

同様にして，

$$\left[\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})\right]_y=(\vec{A}\bullet\vec{C})B_y-(\vec{A}\bullet\vec{B})C_y$$

$$\left[\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})\right]_z=(\vec{A}\bullet\vec{C})B_z-(\vec{A}\bullet\vec{B})C_z$$

まとめると， $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}\bullet\vec{C})-(\vec{A}\bullet\vec{B})\vec{C}$

安達, ``ベクトル解析,'' p.28, 培風館, 1961.

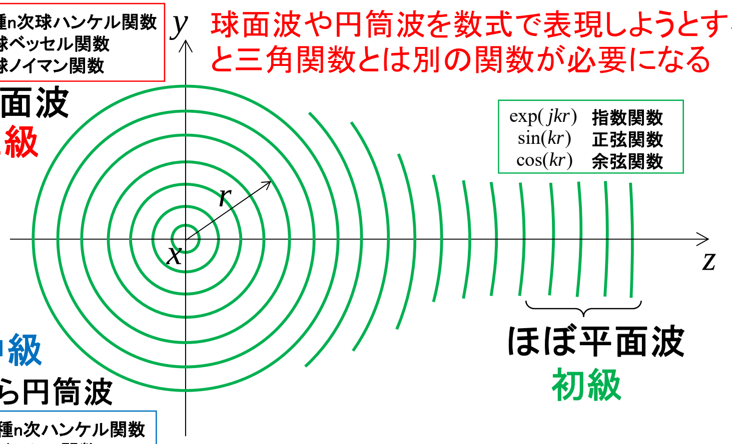
球面波と平面波

$h_n^{(2)}(kr)$	第2種n次球ハンケル関数
$j_n(kr)$	n次球ベッセル関数
$n_n(kr)$	n次球ノイマン関数

球面波や円筒波を数式で表現しようとすると三角関数とは別の関数が必要になる

$\exp(jkr)$	指数関数
$\sin(kr)$	正弦関数
$\cos(kr)$	余弦関数

球面波
上級



ほぼ平面波
初級

中級
2次元なら円筒波

$H_n^{(2)}(kr)$	第2種n次ハンケル関数
$J_n(kr)$	n次ベッセル関数
$N_n(kr)$	n次ノイマン関数

波源の近くに存在する球面波も，遠方ではやがて平面波とみなせる。（厳密には波源から無限遠とみなせる場所で完全な平面波になる）

好村, 光と電波, p.15, 培風館

伝搬方向の波動方程式の一般解

デカルト座標

$\exp(jkr)$	指数関数
$\cos(kr)$	余弦関数
$\sin(kr)$	正弦関数

$$\begin{cases} e^{jkz}=\cos(kz)+j\sin(kz) & \text{後退波}\\ e^{-jkz}=\cos(kz)-j\sin(kz) & \text{前進波} \end{cases}$$

（平面波）

デカルト座標（時間項含む）

$$\begin{cases} e^{jkz}e^{j\omega t}=\cos(\omega t+kz)+j\sin(\omega t+kz)\\ e^{-jkz}e^{j\omega t}=\cos(\omega t-kz)+j\sin(\omega t-kz) \end{cases}$$

円筒座標

$H_n^{(2)}(kr)$	第2種n次ハンケル関数
$J_n(kr)$	n次ベッセル関数
$N_n(kr)$	n次ノイマン関数

$$\begin{cases} H_n^{(1)}(kr)=J_n(kr)+iN_n(kr) & \text{後退波}\\ H_n^{(2)}(kr)=J_n(kr)-iN_n(kr) & \text{前進波} \end{cases}$$

（発散円筒波）

円筒座標（時間項含む）

$$\begin{cases} H_n^{(1)}(kr)e^{j\omega t}=\left[J_n(kr)+iN_n(kr)\right]e^{j\omega t}\\ H_n^{(2)}(kr)e^{j\omega t}=\left[J_n(kr)-iN_n(kr)\right]e^{j\omega t} \end{cases}$$

球座標

$h_n^{(2)}(kr)$	第2種n次球ハンケル関数
$j_n(kr)$	n次球ベッセル関数
$n_n(kr)$	n次球ノイマン関数

$$\begin{cases} h_n^{(1)}(kr)=j_n(kr)+in_n(kr) & \text{後退波}\\ h_n^{(2)}(kr)=j_n(kr)-in_n(kr) & \text{前進波} \end{cases}$$

（発散球面波）

球座標（時間項含む）

$$\begin{cases} h_n^{(1)}(kr)e^{j\omega t}=\left[j_n(kr)+in_n(kr)\right]e^{j\omega t}\\ h_n^{(2)}(kr)e^{j\omega t}=\left[j_n(kr)-in_n(kr)\right]e^{j\omega t} \end{cases}$$

直交した2つの関数をオイラーの公式で結びつける点で平面波と類似

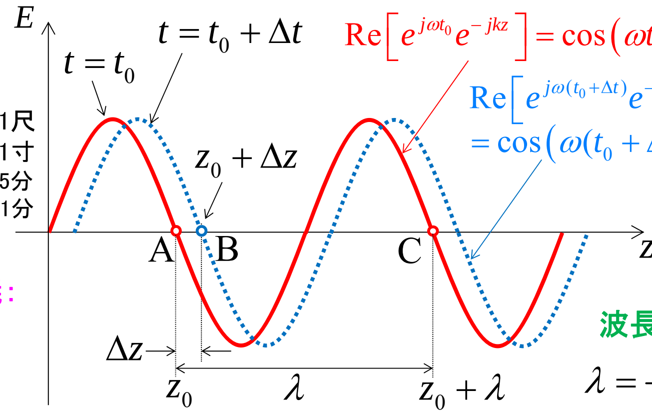
野本, "ワイヤレス基礎理論," pp. 28-37, 電子情報通信学会, 2003
本郷, "電磁界の基礎と計算法," pp.21-26, 信山社サイテック, 1993
シェルクノフ, 森脇訳, "電磁波論," pp. 44-59, 岩波書店, 1962

波長と位相速度

よく使う周波数と波長
100 MHz 3 m
1 GHz 30 cm 1尺
10 GHz 3 cm 1寸
20 GHz 1.5 cm 5分
100 GHz 3 mm 1分

$$\mathrm{Re}\left[e^{j\omega t_0}e^{-jkz}\right]=\cos(\omega t_0-kz)$$

$$\mathrm{Re}\left[e^{j\omega(t_0+\Delta t)}e^{-jkz}\right]=\cos\left(\omega(t_0+\Delta t)-kz\right)$$



波数の定義：

$$k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

波長短縮：

$$\lambda=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}f}$$

同じ周波数でもμとεが大きいほど，波長は短くなり，速度も低下する。

波長：位相が2πだけ異なる点の距離（A-C間の距離）

$$\left|\omega t_0-kz_0-[\omega t_0-k(z_0+\lambda)]\right|=2\pi \Rightarrow \lambda=v/f$$

位相速度：位相が同じ点の最小距離（A-B間の位相差）÷時間

$$\omega t_0-kz_0=\omega(t_0+\Delta t)-k(z_0+\Delta z) \Rightarrow v=1/\sqrt{\mu\varepsilon}$$